# **Лекция 3**

Необходимые условия равновесия внешних сил

Нагрузка и реакции определимых связей.

Прямая задача статики

Рассмотрим тело Т, находящееся в покое под действием удаленных тел, например, Т0 (дальнодействие), и неподвижных тел Т1, Т2, Т3, находящихся с ним в контакте, и называемых *связями*.

Т1

Т1

Т2

Т3

Т0

Рис.1

Силы дальнодействия определяется законами физики, поэтому обычно считаются известными. Все известные силы, действующие на тело, назовем *нагрузкой*. Неизвестные силы, с которыми связи действуют на тело, называются *реакциями связи.* Пусть на тело наложены *достаточные* связи, обеспечивающие его покой при произвольной нагрузке.

***Прямой задачей*** статики является определение реакций связей по заданной нагрузке. Поскольку тело остается в покое при любой нагрузке, то с необходимостью выполнены условия равновесия внешних сил:

Откуда

Где индексом R обозначены искомые реакции связей, а индексом а – нагрузка.

В проекциях на оси x,y,z два векторных условия (1) дают шесть алгебраических уравнений для реакций связей, которые можно представить в матричном виде

# (2)

Здесь *А* - матрица системы, зависящая только от устройства связей, *х*- столбец искомых реакций связей, у – столбец нагрузки. Как известно, алгебраическая система имеет единственное решение только если матрица *А* - квадратная (6 х 6), т.е. уравнения имеют шесть неизвестных и определитель матрицы отличен от нуля.

(3)

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

Связи с такой матрицей *А* назовем ***статически определимыми*** (или коротко  ***определимыми***)потому, что реакции только таких связей могут быть определены из уравнений статики (2) .

Заметим, что условие (3) обеспечивает и тривиальность решения однородной системы

# (4)

при отсутствии нагрузки. Это значит, что реакции определимых связей исчезают при снятии нагрузки. Иначе говоря, если

#### (5)

то все реакции определимых связей равны нулю.

Условие (3) означает, что в матрице *А* не должно быть линейно зависимых строк или столбцов. Строки независимы по ортогональности осей координат и независимости проекций на оси и моментов относительно осей. Зависимые столбцы могут появиться только в случае, если две силы реакции окажутся на одной прямой. Отсюда ***правило построения определимых связей***

*Ставя новую связь, нужно позаботиться о том, чтобы ее реакция*

*не могла оказаться на одной прямой с реакциями предыдущих связей*.

При невыполнении условия (3), связи называются ***избыточными***. Наличие избыточных связей можно выявить двумя мысленными экспериментами: нагревая тело или немного смещая опоры. Если при этом реакции изменяются, то связи избыточны.



При числе неизвестных, равном числу уравнений, избыточность связей в одном направлении всегда сопровождается их недостаточностью в другом направлении. Так для балки на двух опорах при «правильном» числе неизвестных, равном 3, при α = 0 связи становятся избыточными вдоль балки и недостаточными в отношении поворота вокруг опоры А.

## Достаточность условий равновесия внешних сил для сохранения покоя твердого тела.

**Обратная задача статики**

Абсолютно ***твердое тело*** это модель тела, в которой расстояния между точками неизменны во времени. Такая модель значительно упрощает изучение покоя и движения тела. Она практически важна, поскольку деформации большинства деталей машин малы по сравнению с размерами деталей.

## Теорема: Условия являются достаточными для сохранения покоя твердого тела.

Рассмотрим ненагруженное свободное покоящееся твердое тело. ***Свободное тело*** – это тело, движение которого не ограничено связями. Приложим к телу нагрузку **{F}**, удовлетворяющую условиям

(6)

Докажем, что тело останется в покое.

Предположим противное, т.е. что после приложения нагрузки **{F}**, тело все-таки начнет двигаться. Чтобы остановить движение, наложим на тело определимые связи. Тогда возникнут реакции связей **{R},** ипокой будет обеспечен. Значит, объединенная система сил нагрузки **{F}** и реакций связей **{R}** будет уравновешенной и с необходимостью будут выполнены условия:

Но ввиду (6) главный вектор и момент реакций окажутся равными нулю

#### 

Поскольку связи статически определимы, то отсюда вытекает, что все реакции равны нулю. Таким образом, связи не нужны, и тело остается в покое после приложения системы **{F}**. Значит условия (6) являются достаточными для равновесия системы сил **{F}**  и сохранения покоя твердого тела. Теорема доказана.

В случае деформируемого тела условия (6) не достаточны. Это значит, что для равновесия деформируемого тела кроме условий (3), нужно выполнить и некоторые другие. Однако, если деформируемое тело фактически находится в покое, то уравнения (3) выполнены.

***Пример:*** Если к покоящемуся мячу приложить две силы (Рис.7 б), мяч не останется в покое, он начнет деформироваться, система сил не будет уравновешенной, хотя условия (13) и будут выполнены. Однако, после того как мяч примет окончательную деформированную форму (Рис.1 а), система этих двух сил станет уравновешенной.

Рис.7

а)

б)

Условия (6) позволяют решить ***обратную задачу статики***: проверить уравновешенность системы сил **{F},** приложенной к свободному твердому телу.

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

**Скалярные условия равновесия частных систем сил.**

***а) Произвольная пространственная система сил***

Хотя соотношения механики имеют векторный характер, все вычисления обычно ведутся в скалярной форме. Переход к скалярной форме осуществляется проектированием векторных соотношений на оси координат. Векторные условия равновесия **V=0, Mo=0** в проекциях на декартовы оси координат дают шесть скалярных условий:

***б) Пространственная система сходящихся сил.***

***Сходящейся*** называется система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке. Главный момент такой системы относительно точки пересечения сил О равен нулю **Mo=0**. Поэтому уравнения моментов 4,5,6 в (3) тождественно удовлетворены и остается три условия в проекциях:

О

Рис.3

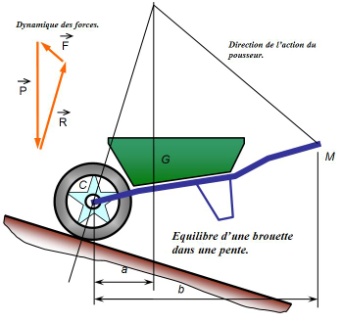
 ***Теорема о 3х силах:*** Если тело находится в покое под действием 3х сил, линии действия двух из которых пересекаются, то система сходящаяся.

Рис.4

Действительно, главный момент системы относительно точки пересечения двух сил равен моменту третьей силы и нулю. Значит и третья сила проходит через указанную точку.

Теорема позволяет графически решить, например, задачу (Рис.4) и найти треугольник сил, приложенных к тачке.

z

x

y

**V**

**Mo**

Рис.5

***в) Пространственная система параллельных сил***

Направим ось z параллельно силам. Тогда главный вектор **V** будет параллелен z, а главный момент **Мо**, будет принадлежать плоскости x y. То есть **V⊥Mo**. Условия 2,3,6 в (2) тождественно удовлетворены и остается 3 условия равновесия:

Курс лекций по ТМ А.Костарева 2011

***г) Плоская система сил.***

В произвольной точке О плоскости сил (Рис.6) построим систему координат xОу так, чтобы плоскость ху совпала с плоскостью сил. Главный вектор системы **V** лежит в плоскости xOy, а главный момент **Mo** ей перпендикулярен. Следовательно 3,4,5 в (2) тождественно удовлетворены, и для равновесия

x

y

z

**M0**

**V**

Рис.6

О

системы достаточно потребовать

I) (6)

Можно показать, что справедливы еще две формы уравнений равновесия для плоской системы сил:

II) () не перпендикулярно (7)

III) (ABC- не на одной прямой) (8)